

Предмет	Математика (профильный уровень), ЕГЭ 2023
Задание №	18
Тема	Задача на числа
Уровень сложности	Высокий

Задача «на числа» (№ 18) ЕГЭ по математике профильного уровня проверяет умение строить и исследовать простейшие математические модели. Данная задача содержит условие, которое дополнено тремя вопросами. Первые два из них обычно начинаются со слов «Может ли» или «Существует ли». Такие формулировки предполагают выбор одного из двух вариантов ответа: «да» или «нет», каждый из которых должен быть **обоснован!** Ответ «да» должен быть подтверждён примером. Ответ «нет» – рассуждениями, которые показывают, что допущение о существовании чисел, соответствующих условию, приводит к противоречию. Третий вопрос обычно требует количественного ответа, который получается на основе оценки области возможных значений и демонстрации примера, который показывает, что границы области значений достижимы.

Разберём задачу: Пусть $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим $M_{<C}(a_n)$ среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые меньше некоторого числа C , которое больше наименьшего, но не больше наибольшего члена этой последовательности. Обозначим $M_{\geq C}(a_n)$ — среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые не меньше числа C . Среднее арифметическое одного числа равно самому числу. К каждому члену последовательности $\{a_n\}$ прибавили 4. Получилась новая последовательность, которую обозначим $\{a_n + 4\}$. а) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n + 4) < M_{<79}(a_n)$? б) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n + 4) < M_{<79}(a_n)$ и $M_{\geq 79}(a_n + 4) < M_{\geq 79}(a_n)$. в) Известно, что среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$ равняется 84, $M_{\geq 79}(a_n) = 94$, $M_{<79}(a_n) = 70$, $M_{\geq 79}(a_n + 4) = 96$ и $M_{<79}(a_n + 4) = 72$. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности $\{a_n\}$?

Несмотря на то, что задача № 18 относится к задачам высокого уровня сложности, рекомендуем всем участникам экзамена попробовать свои силы в её решении. Для получения зачётного балла достаточно дать правильный и обоснованный ответ хотя бы на один из её вопросов.

Важно помнить!

1. Начинать работу над задачей лучше с конструирования примеров. Это поможет осмыслить её условие и, возможно, найти правильный ответ на пункт (а) или (б). Конструируя первые примеры, старайтесь максимально упростить ситуацию (уменьшить количество чисел, использовать равные или пограничные числа и т.п.). Так, условие нашей задачи можно проиллюстрировать последовательностью: $(78, 79, 80) \mapsto (82, 83, 84)$. Этот пример подтверждает справедливость пункта (а), так как для него $M_{<79}(a_n) = 78$, а $M_{<79}(a_n + 4) = 0$.

2. Для подбора примера иногда полезно построить математическую модель. Так, для конструирования примера в пункте (б) выберем $a_1 < 79 \leq a_2 \leq a_3$, где $a_1 + 4 \geq 79$. Тогда по условию $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} + 4 < \frac{a_2 + a_3}{2}$. Откуда $a_2 + a_3 > 2a_1 + 24$, так как $a_1 \in [75; 78]$, то выберем $a_1 = 75$, $a_2 = a_3 = 90$. Этот пример доказывает справедливость (б).

3. Обоснование ответа «нет» может быть получено либо **полным** перебором всех ситуаций, удовлетворяющих условию задачи, либо рассуждениями, доказывающими, что допущение обратного приводит к противоречию. Второй путь требует построения модели.

4. Ответ на количественный вопрос задачи будет засчитан **только в том случае**, если представлено описание способа его получения. Пусть последовательность имеет n членов, из которых m не меньше 79. Тогда в части (в) получим уравнение: $84n = 94m + 70(n - m)$. Откуда $7n = 12m$. Значит, $n \geq 12$. Для доказательства достижимости границы необходимо привести пример. В нашем случае примером является последовательность 12 чисел: 68, 68, 68, 68, 78, 94, 94, 94, 94, 94, 94, 94, удовлетворяющая условиям: $M_{<79}(a_n) = 70$, $M_{\geq 79}(a_n) = 94$, $M_{<79}(a_n + 4) = 72$, $M_{\geq 79}(a_n + 4) = 96$.